آموزشی

بررسی زمان سقوط روی

شایان خراسانی
دبیرستان شهید بهشتی
ساری

چکیده

در این مقاله عملکرد فرایند سقوط آزاد یا رهایی جسم را از یک ارتفاع معین، در ترکیب با مسائل هندسی نشان داده‌ایم. مسئلهٔ کمینهٔ زمان سقوط میان دو نقطه در یک صفحه که نیوتون آن را برای مسیرهای منحنی حل کرده و مسیر موردنظر را یافته، برای مسیرهای دیگری درون مثلث قائم‌الزاویه حل شده است. همهٔ مثال‌های اشاره شده در مقالهٔ جدید و مطالعهٔ آن‌ها می‌تواند دانش‌آموزان را در رویارویی با مسائل مرتبط با این فرایند توانمندتر کند.

کلیدواژه‌ها: زمان سقوط، مسیرهای هندسی

مقدمه

سقوط آزاد یا رها شدن جسم از یک ارتفاع، از مشهورترین مباحث مکانیک است که دانش‌آموزان در کتاب درسی خود با آن آشنا می‌شوند. اما اصولاً اکثر مسائل مربوط به آن به شکلی مطرح می‌شوند که خلاقیتی در دانش‌آموزان ایجاد نمی‌کند، زیرا تقریباً همهٔ کتاب‌های درسی و کمک‌درسی، مثال‌های مرتبط با این فرایند را به این صورت مطرح می‌کنند که یک یا چند جسم از یک ارتفاع مشخص رها می‌شوند و پارامترهای سینماتیکی مربوط به آن‌ها در این فرایند، مطلوب است. طرح مسئله‌ای توأم با فرایند فیزیکی مورد بحث و یک مسئلهٔ هندسی، هم خلاق است و هم تحلیل فیزیکی و توان ریاضی دانش‌آموز را ارتقا می‌دهد. البته در فیزیک کلاسیک مسائلی که از تلفیق فیزیک و ریاضی (به‌ویژه هندسه) طرح شده‌اند، کم نیستند. به‌عنوان نمونه در کتاب **ایوان نیون**[1] «قضیهٔ فرما» به شکل قضیه آموزنده‌ای در حل چند مسئلهٔ ریاضی به‌کار رفته است. همچنین، در کتاب **یوسپنسکی**[2] بسیاری از مسائل ریاضی توسط مکانیک حل شده‌اند.

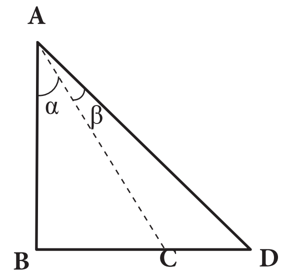
اما در این مقاله به منظور بررسی فرایند رهاسازی جسم، مثلث قائم‌الزاویه را برگزیده‌ایم، زیرا مطالعهٔ زمان سقوط روی مسیرهای متفاوت در آن، هم آموزنده است و هم حاوی نکات خلاق و جالبی است. در قسمت پایانی مقاله هم مسئلهٔ کمینهٔ زمان در مثلث قائم‌الزاویه را بررسی کرده‌ایم. انگیزهٔ اصلی ما در این قسمت، از مطالعهٔ داستان به چالش کشیده شدن **نیوتون** توسط **لایب نیتس** و **برنولی** ناشی شد. در سال ۱۶۹۶، لایب نیتس به کمک برنولی مسئله‌ای را به این شکل طرح کرد: «دو نقطه را به‌طور کاتوره‌ای روی یک صفحهٔ قائم اختیار کنید. وقتی جسم سنگینی بدون وجود اصطکاک تحت تأثیر نیروی گرانش از نقطهٔ بالایی به نقطهٔ پایینی برود، چه منحنی‌ای را طی می‌کند تا این فاصله را در کوتاه‌ترین زمان بپیماید؟»

زمان سقوط درون مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD را در نظر بگیرید که در رأس B قائمه است. مسیر AC را درون مثلث طوری رسم کرده ایم که با ضلع قائم زاویهٔ α و با وتر زاویهٔ β

مسیرهای هندسی

می‌سازد. به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱. یک بار جسم از نقطهٔ A رها می‌شود و به C می‌رسد و بار دیگر مسیر AC را طی می‌کند و به D می‌رسد. زمان طی AC را t^s و زمان طی AD را t'^s در نظر می‌گیریم.

جسمی را از نقطهٔ A رها می‌کنیم و پس از طی مسیر AC، در مدت t^s به نقطهٔ C می‌رسد. جسم دیگری را در همان لحظه از نقطهٔ A رها می‌کنیم و مسیر AD را در t'^s طی می‌کند. معادلات حرکت مربوط به مسیرهای AC و AD به‌صورت زیر هستند:

$$AC = \frac{۱}{۲} g \cos\alpha t^{۲} \qquad (۱)$$

$$AD = \frac{۱}{۲} g \cos(\alpha+\beta) t'^{۲} \qquad (۲)$$

بدیهی است که AC و AD را می‌توان برحسب AB به‌صورت زیر نوشت:

$$AB = \frac{۱}{۲} g \cos^{۲}\alpha t^{۲} \qquad (۳)$$

$$AD = \frac{۱}{۲} g \cos^{۲}(\alpha+\beta) t'^{۲} \qquad (۴)$$

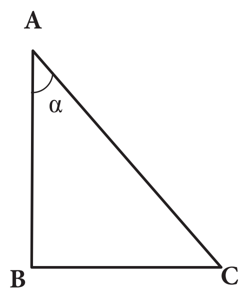
با تقسیم معادلات فوق برهم، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{t}{t'} = \frac{AC}{AD} \qquad (۵)$$

نتیجهٔ فوق نشان می‌دهد که نسبت زمان رها شدن در دو مسیر متفاوت درون مثلث قائم‌الزاویه با نسبت طول مسیرهای متناظر، متناسب است.

زمان سقوط در مثلث قائم‌الزاویهٔ ۳، ۴ و ۵

نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه ABC زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید در رأس B انحنای بی‌نهایت کوچکی ایجاد می‌کنیم، به‌طوری که اگر جسمی از نقطهٔ A رها شد، پس از رسیدن به B به حرکت خود ادامه دهد تا به C برسد (یعنی یک برخورد کشسان صورت می‌گیرد). بررسی ما در این قسمت، مقایسهٔ زمان رها شدن روی وتر AC و روی مسیر ABC است.



شکل ۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن زاویهٔ رأس A برابر α است، یک‌بار جسم فاصلهٔ نقطهٔ A تا C را در t^s طی می‌کند و بار دیگر مسیر AB را در $t_۱^s$ و مسیر BC را در $t_۲^s$ طی می‌کند. در رأس B انحنای بی‌نهایت کوچکی ایجاد کرده‌ایم.

اگر فرض کنیم جسم، وتر AC را در t^s طی کرده است، معادلهٔ حرکت آن به شکل زیر خواهد بود:

$$AC=\frac{۱}{۲}g\cos\alpha\, t^{۲} \qquad (۶)$$

و فـــرض می‌کنیم زمان طی مســـیر قائم AB، $t_۱^s$ است، پس:

$$AB=\frac{۱}{۲}gt_۱^{۲} \qquad (۷)$$

با ادغام این دو رابطه نتیجه می‌گیریم:

$$t=\frac{t_۱}{\cos\alpha} \qquad (۸)$$

همچنین براساس آخرین فرض ما زمان طی مسیر افقی BC، $t_۲^s$ است، پس:

$$BC=gt_۱t_۲ \qquad (۹)$$

مقدار ســـرعت در نقطهٔ B برابر $gt_۱$ و بدیهی است روی مســـیر BC سرعت ثابت اســـت. پس با قرار دادن BC=AC sinα در رابطهٔ فـــوق و جاگذاری مقدار AC از رابطـــهٔ (۶) و به کمک رابطهٔ (۸) ارتباط میان $t_۱$ و $t_۲$ به‌صورت زیر حاصل می‌آید:

$$t_۲=\frac{۱}{۲}(\tan\alpha)t_۱ \qquad (۱۰)$$

با مقایسهٔ مســـیر این رابطه با رابطهٔ $t=\frac{t_۱}{\cos\alpha}$ داریم:

$$t_۲=\frac{\sin\alpha}{۲}t \qquad (۱۱)$$

حال مقدار $t_۱+t_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$t_۱+t_۲=(\cos\alpha+\frac{۱}{۲}\sin\alpha)\times t$$

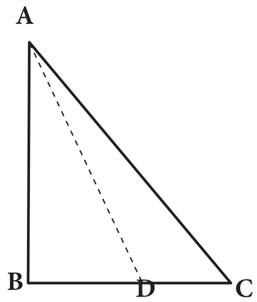
پس:

$$t=\frac{t_۱+t_۲}{\cos\alpha+\frac{۱}{۲}\sin\alpha} \qquad (۱۲)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد، اگر $\cos\alpha+\frac{۱}{۲}\sin\alpha=۱$ باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت: $t=t_۱+t_۲$. شرط فوق به ازای $\alpha\approx ۵۳^\circ$ صادق است. لذا برقراری رابطهٔ $t=t_۱+t_۲$ در مثلث قائم‌الزاویه ۳، ۴ و ۵ که دارای زاویهٔ حاده ۵۳° است، امکان‌پذیر است. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا مســـیر دیگری درون این مثلـــث وجود دارد که شـــرایط مورد بحث برای آن صادق باشـــد؟ پاسخ را به شکل برهان خلف مطرح می‌کنیم.

برهان خلف

فرض کنید در مثلث شکل ۳ مسیر دیگری مانند ADC وجود دارد، به‌طوری که زمان رها شـــدن در آن برابر t یا $t_۱+t_۲$ است.

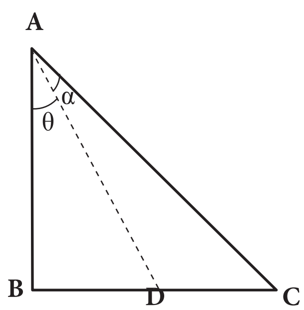


شکل ۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ۳، ۴ و ۵ که در آن مسیر فرضی ADC در نظر گرفته شده است، با این فرض که: $t_{ADC}=t$.

با توجه به اینکه $V_B=V_D$، پس مسیر DC برای هر دو جسمی که از ADC و ABC رها می‌شوند، یکسان خواهد بود. لذا ناگزیر زمان مســـیر ABD با مسیر AD برابر می‌شـــود که این یعنی مثلـــث ABD یک مثلث قائم‌الزاویهٔ ۳، ۴ و ۵ دیگر است که امری غیرممکن است. بنابراین فرض خلف نادرست است.

کمینهٔ زمان سقوط در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، جســـمی از نقطهٔ A رها می‌شود و به نقطهٔ C می‌رسد. اما به این منظور بی‌نهایت مسیر از A تا C درون مثلث وجود دارد. برای ما مسیر کوتاه‌تر مطلوب اســـت. می‌خواهیم ببینیم کدام مسیر در مقایسه با مســـیرهای دیگر در کمترین زمان طی می‌شود.



شکل ۴. در این مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ رأس A برابر α است. بار دیگر فرض می‌کنیم در B و در D انحنای بی‌نهایت کوچکی وجود دارد و در آن‌ها یک برخورد کشسان صورت می‌گیرد. مسیر کمترین زمان را ADC برگزیده‌ایم، به‌طوری که AD با ضلع قائم‌الزاویه زاویهٔ θ می‌سازد.

با فرض اینکه جسم مسیر ADC را در مقایسه با مسیرهای دیگر در کمترین زمان طی می‌کند، زمان طی مسیر AD را $t'_{۱}$ در نظر می‌گیریم و زمان طی مسیر قائم AB را $t_{۱}$ ثانیه و زمان طی مسیر افقی BC را $t_{۲}$ ثانیه در نظر می‌گیریم. معادلات حرکت به شکل زیرند:

$$AD=\frac{۱}{۲}g\cos\theta\, t'^{۲}_{۱} \quad (۱۳)$$

$$AB=\frac{۱}{۲}gt_{۱}^{۲} \quad (۱۴)$$

بی‌درنگ از معادلات فوق نتیجه می‌گیریم:

$$t'_{۱}=\frac{t_{۱}}{\cos\theta} \quad (۱۵)$$

با توجه به بحث مربوط به بخش قبل داریم:

$$t_{۲}=\frac{۱}{۲}(\tan\alpha)t_{۱} \quad (۱۶)$$

$$t_{BD}=\frac{۱}{۲}(\tan\theta)t_{۱} \quad (۱۷)$$

پس:

$$t_{DC}=t_{۲}-t_{BD}=\frac{۱}{۲}(\tan\alpha-\tan\theta)t_{۱}$$

از این‌رو زمان طی مسیر فرضی ADC به‌صورت زیر است:

$$t_{ADC}=\frac{t_{۱}}{\cos\theta}+\frac{۱}{۲}(\tan\alpha-\tan\theta)t_{۱} \quad (۱۸)$$

برای کمینه شدن t_{ADC} از آن نسبت به θ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dt_{ADC}}{d\theta}=۰\Rightarrow\theta=۳۰^\circ$$

پس مسیری که در آن زمان رها شدن کمینه است، به زاویهٔ ۳۰° نسبت به ضلع قائم مثلث قائم‌الزاویه است. اکنون دو پرسش مطرح می‌شود: نخست اینکه اگر زاویهٔ رأس A در مثلث مورد اشاره ۳۰° باشد، کمترین زمان مربوط به کدام مسیر است؟

برای پاسخ باید توجه شود که مشتق رابطهٔ (۱۸)، ریشه‌ای در بازه $۰<\theta<۳۰^\circ$ ندارد، بنابراین ضروری است مقدار t_{ADC} را در نقاط مرزی $\theta=۰$ و $\theta=۳۰^\circ$ محاسبه کنیم. در $\theta=۰$ و $\alpha=۳۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم:

$$t_{ABC}=t_{۱}+\frac{۱}{۲}t_{۱}\tan ۳۰^\circ \quad (۱۹)$$

و در $\theta=۳۰^\circ$ و $\alpha=۳۰^\circ$ از رابطهٔ (۱۵) نتیجه می‌گیریم:

$$t_{AC}=\frac{t_{۱}}{\cos ۳۰^\circ} \quad (۲۰)$$

به وضوح با مقایسهٔ روابط (۱۹) و (۲۰) می‌توان نتیجه گرفت:

$t_{AC}<t_{ABC}$

پس وقتی $\alpha=۳۰^\circ$ است، مسیری که با کمترین زمان رها شدن توأم است، همان وتر مثلث قائم‌الزاویه است. پرسش دوم این است که اگر زاویهٔ α کوچک‌تر از ۳۰° باشد، کمینهٔ زمان کدام مسیر در مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود؟ این‌بار با توجه به $\alpha<۳۰^\circ$، روابط (۱۹) و (۲۰) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$t_{ABC}=t_{۱}+\frac{۱}{۲}(\tan\alpha)t_{۱} \quad (۲۱)$$

$$t_{AC}=\frac{t_{۱}}{\cos\alpha} \quad (۲۲)$$

مقایسهٔ روابط فوق نشان می‌دهد، همواره داریم: $t_{AC}<t_{ABC}$. بنابراین به این نتیجهٔ کلی می‌رسیم: «در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویهٔ رأس بالایی آن $\alpha\leq۳۰^\circ$ است، مسیری که کمترین زمان را نسبت به مسیرهای دیگر دارد، مسیر وتر مثلث است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان دادیم، بررسی فرایند رها شدن جسم از یک ارتفاع می‌تواند با مثال‌های هندسی همراه باشد و مطالعهٔ آن‌ها خلاقیت دانش‌آموزان را دو چندان می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Ivan Nion
2. Uspernskii

منابع

۱. نیون، ایوان (۱۳۶۹). ماکزیمم و مینمم. ترجمهٔ پرویز شهریاری و ابراهیم عادل. نشر بردار.

2. V. A. Uspenskii (1961). *some applications of mechanics to mathematics (translated from the Russian by Halina Moss), Blaisdell.*